105. 函數方程式 $\int f(x+t)\,d\varphi(t)=0$ ニ就テ

南雲 道夫 (阪大)

數物ノ年會モイヨイヨ目ノ前ニ迫ッテ來マシタ。就テハ其ノ年會デ皆樣ニ聞イテ頂ク私ノ問題ヲ、今茲ニ申シ上ゲテ、會デハ私ノ講演ヲ簡單ニスマセ度存ジマス。

此ノ問題ハ已ニ紙上談話 21 号 (64) 及ビ 22 号 (68) ニ於テ述ベタ函數方程式

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

ノ擴張デ、之レハ已ニ 22 号 (68) ニ於テモ述ベテ置キマシタ。特殊ナ場合ガ出來ナイノニ、徒ニ問題ヲ擴張スルコトハ、自分ナガラ恥シイ次第デスガ、此ノ問題ハ更ニ次ノ樣ニ拡張(抽象化?)スルコトガ出來マス。

線狀移動可能函數変換 *linear translative functional transformation* $Tf(x)=f^*(x)$ トハ

(1) 線狀 $T\left[\sum^{n} c_\nu f_\nu(x)\right]=\sum^{n} c_\nu Tf_\nu(x)$

(2) 移動可能 $Tf(x+c)=f^*(x+c)$ [但シ $Tf(x)=f^*(x)$, c ハ任意ノ實數]

ナル運算ヲ云フ.

所ガ (1) ト (2) トカラ

$$\frac{f^*(x,\lambda+\Delta\lambda)-f^*(x,\lambda)}{\Delta\lambda}=T\,\frac{f(x,\lambda+\Delta\lambda)-f(x,\lambda)}{\Delta\lambda}$$

故ニ、モシモ $\Delta\lambda \to 0$ ノトキ極限ヲ許セバ

(3) 正則 $\quad \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \mathrm{T} f(x,\lambda) = \mathrm{T} \dfrac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda)$

トナル。

又 $\quad \dfrac{d}{dx} f(x) = \left[\dfrac{\partial}{\partial\lambda} f(x+\lambda) \right]_{\lambda=0}$

ニヨリ、正則ナ場合ニハ

(3)′ $\quad \dfrac{d}{dx} \mathrm{T} f(x) = \mathrm{T} \dfrac{d}{dx} f(x)$

ガ得ラレル。以下ハ問題ヲ正則ナ場合ニ限ル。Stieltjes 積分 $\mathrm{T} f(x) = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\, d\varphi(t)$ デハ $f(x,\lambda)$ ガ λ デ連続微分可能ナル限リ正則デアル。

サテ一般ニ、x 実数，λ 複素数トシテ

(4) $\quad \underline{\mathrm{T} e^{\lambda x} = G(\lambda) e^{\lambda x}} \qquad$ ($G(\lambda)$ ハ整函数)

ナルコトガ容易ニ証明出来ル。故ニ一般ニ

$$\mathrm{T} f(x) = 0$$

ナル函數方程式ハ

$$f(x) = e^{\lambda_i x} \qquad [\text{但シ } G(\lambda_i) = 0]$$

ナル解ヲ持ツ。

又 λ_i ガ $G(\lambda)$ ノ m 重ノ零点ナラバ，

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_{m-1} x^{m-1}) e^{\lambda_i x}$$

モ $\mathrm{T} f(x) = 0$ ノ解トナル。[(3)ニヨッテ証明出来ル]

カクテ問題ハ、一般ニ $\mathrm{T} f(x) = 0$ ナルトキハ

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x) e^{\lambda_i x} \quad [P_i(x) \text{ ハ } m_i - 1 \text{ 次ノ多項式}]$$

トナルデアラウカ？

之レガ目下ノ問題デス！　未ダ私ニハ出来マセンガ、少シ手ヲツケタ跡ヲ記シマス。　上ノ結果ガ成立シタモノト假定シテ其ノ級数ヲ見出ス方法ヲ角谷君ガ見付ケテ下サッタ。私ハソレヲ変形シテ次ノ結果ヲ得タ。

上ノ級数ガ一様收斂デアリ、ソレニ項別ニ運算ヲ施セルモノト假定シテ、$\dfrac{x^\nu}{\nu!}e^{\lambda_i x}$ ノ項ヲ求メルニハ、次ノ事実ガ役立ツ。

$$T\int_0^x e^{\lambda(x-t)}e^{\lambda_i t}\frac{t^\nu}{\nu!}dt = e^{\lambda x}\frac{G(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{\nu+1}}$$

但シ $G(\lambda_i)=0$　$(0\leqq\nu\leqq m_i-1)$

故ニ　$$\frac{1}{G(\lambda)}T\int_0^x e^{\lambda(x-t)}e^{\lambda_i t}\frac{t^\nu}{\nu!}dt$$

ノ $\lambda=\lambda_i$ ニ於ケル留數（*residue*）ハ丁度 $e^{\lambda_i x}\dfrac{x^\nu}{\nu!}$ トナル。

従ッテ

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_n}\left\{\frac{1}{G(\lambda)}T\int_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt\right\}d\lambda = F_n(x).$$

ニ於テ $\mathcal{C}_n$ ヲ $G(\lambda)$ ノ零点ヲ内ニ包ム閉曲線トスレバ $\mathcal{C}_n$ ガ限リナク擴ガルトキニ $F_n(x)$ ガ $f(x)$ ニ收斂スルデアラウ！（？）

サテ（5）ナル式ガ $\sum^n P_i(x)e^{\lambda_i x}$ ナル形式ヲ有スルコトハ次ノ様ニスレバ解リマス。

$$y(x)=\int_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt$$

トオケバ容易ニ

$$\frac{dy(x)}{dx}=\lambda y(x)+f(x)$$

故ニ $$T\frac{dy}{dx}=\lambda Ty+Tf(x)$$

所が假定ニヨリ $Tf(x)=0$. 從ッテ

$$\frac{d}{dx}Ty(x)=\lambda Ty(x)$$

故ニ $$Ty(x)=A(\lambda)e^{\lambda x}.$$

$y(x)$ ハ λ ニツキ整函數デ T が正則ダカラ $A(\lambda)$ モ整函數デアル。之ニヨリ

$$\frac{1}{G(\lambda)}T\int_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt=\frac{A(\lambda)}{G(\lambda)}e^{\lambda x}$$

ハ $\lambda=\lambda_i$ ニ於テ $P_i(x)e^{\lambda_i x}$ ナル形式ノ留數ヲ持ツ。

以上ハ全ク形式的ナ運算バカリデシタ。之レカラハ收斂ノ大問題ニ手ヲ付ケネバナリマセン。私ニハ仲々難カシイ問題デス、皆様ノ御助力ヲ仰ギマス。（以上）

——（三月十六日）——